Rappels mathématiques

Lors des épreuves de concours de Sciences-Physiques de nombreux étudiants ratent le coche à cause d'une insuffisance flagrante des bases de mathématiques : Trigonométries, calcul mental, Système unitaires etc …..
Afin de permettre à nos étudiants d'avoir un bon niveau en ce début d'année scolaire, voici le premier dossier des rappels mathématiques ….

PARTIE I – Rappels

I- Mouvement d'un point du solide (déformable ou non)

1- *Référentiel*

Un référentiel est un objet qui permet de repérer les positions successives d'un point d'un solide dont on étudie le mouvement.

Choix du référentiel : on choisit le référentiel le plus adapté au mouvement que l'on souhaite décrire.

Lorsque l'on décrit le mouvement d'un objet (ou d'un point qui le représente), il faut indiquer le référentiel choisi.

2- *Trajectoire d'un point d'un solide*

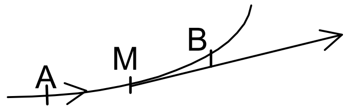
La trajectoire d'un point du solide est l'ensemble des positions occupées par le point au cours de son mouvement.

3- *Vecteur vitesse d'un point d'un solide*

La vitesse instantanée d'un point d'un solide situé en M à un instant t est représentée par un vecteur.

Ce vecteur a les caractéristiques suivantes :
- une origine : le point M
- une direction : celle de la tangente à la trajectoire en cette position M ;
- un sens : celui du mouvement ;
- une valeur : celle de la vitesse moyenne entre A et B, deux positions très proches de M. Elle s'exprime en $m.s^{-1}$ (m/s).
- Pour représenter la vitesse en M à l'instant t, on représente le vecteur vitesse à partir du point M.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t}$$



4- *Caractérisation du mouvement d'un point du solide*

- Le mouvement du point est rectiligne quand la trajectoire est une droite : son vecteur vitesse garde la même direction.
- Le mouvement du point est circulaire quand sa trajectoire est un cercle ou une portion de cercle.
- Le mouvement du point est uniforme quand la valeur de sa vitesse ne change pas.
- Le mouvement du point est rectiligne uniforme quand sa trajectoire est une ligne droite et que sa vitesse est constante : son vecteur vitesse est constant.

5- *Centre d'inertie d'un solide (on se limite aux solides indéformables)*

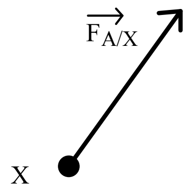
Considérons un solide soumis à la seule action de la Terre : il existe un point dont le mouvement par rapport à la Terre est plus simple que celui des autres points. On l'appelle le centre d'inertie de l'objet.
On admet que ce point est confondu avec le centre de gravité du solide.

II- Interactions et forces

Quand un système A agit sur un système B, simultanément B agit sur A ; on dit que A et B sont en interaction. L'action de A sur B est notée A/B et l'action de B sur A est notée B/A.
Cet énoncé est applicable dans toutes les situations, c'est-à-dire quand les systèmes sont au repos et aussi quand ils sont en mouvement.

1- Force

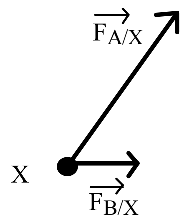
Quand un système X est en interaction avec un système A, on appelle force exercée par A sur X l'action de A sur X.
Pour représenter une force, on représente souvent le système sur lequel elle s'exerce par son centre d'inertie auquel on attribue la masse du système.
On fait figurer ensuite la force exercée par A sur X par le représentant d'un vecteur accompagné du symbole ci-contre et dont les caractéristiques sont les suivantes :



- Son origine est le point représentant le système.
- Sa direction et son sens sont ceux de la force.
- Sa longueur est proportionnelle à l'intensité de la force.

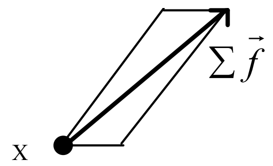
2- Somme des forces

L'ensemble des forces exercées par différents systèmes sur le système X est équivalent à une force unique qui s'exerce sur le centre d'inertie G du système X.



Cette force unique s'appelle somme des forces et se note $\sum \vec{f}$.

Le vecteur qui représente cette force unique est la somme des vecteurs représentant chacune des forces. L'origine de ce vecteur est le point représentant le système X.



III- Lois de Newton vues en 1ère

1- Principe d'inertie ou première loi de Newton

Dans certains référentiels, appelés référentiels galiléens, la vitesse $\vec{v}_G$ du centre d'inertie d'un système est constante si et seulement si la somme des forces $\sum \vec{f}$ qui s'exercent sur le système est nulle.
Pour la plupart des situations que nous étudierons, la Terre pourra être considérée comme un référentiel galiléen.

2- Relation de la dynamique ou deuxième loi de Newton

Lorsque le mouvement d'un système est étudié dans un référentiel galiléen :

La variation de la vitesse du centre d'inertie $\Delta\overrightarrow{v_G}$, déterminée sur un intervalle de temps de faible durée, et la somme des forces $\sum \vec{f}$ qui s'exercent sur le système pendant cet intervalle sont colinéaires et de même sens.

3- Principe des actions réciproques ou troisième loi de Newton

Quand deux systèmes A et X sont en interaction, la force exercée par A sur X et la force exercée par X sur A sont opposées :

- ces deux forces ont la même direction
- ces deux forces sont de sens contraire

- ces deux forces ont la même intensité.

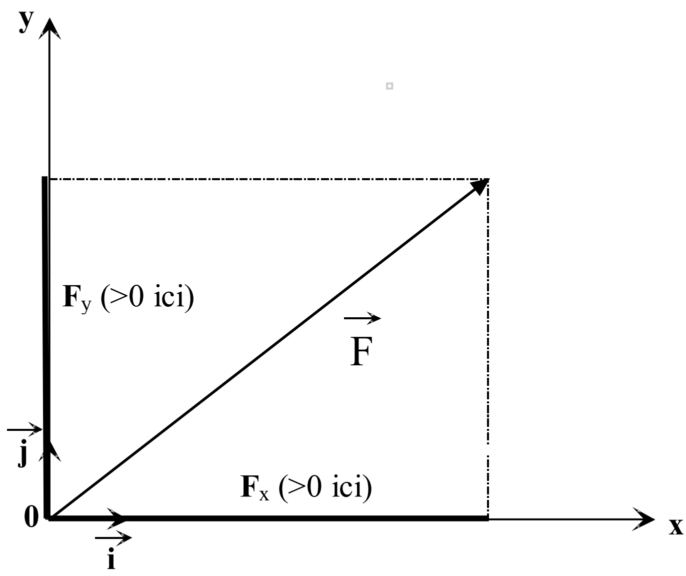
Les vecteurs représentant ces deux forces sont sur la même droite.
L'interaction entre A et X est modélisée par ces deux forces.

Outil mathématique

Tout vecteur $\vec{F}$ peut être décomposé suivant deux axes perpendiculaires.

On obtient : $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ où F_x et F_y représentent respectivement les composantes du vecteur $\vec{F}$ sur les axes x et y.

En conséquence, les composantes sont des valeurs algébriques (positives ou négatives).

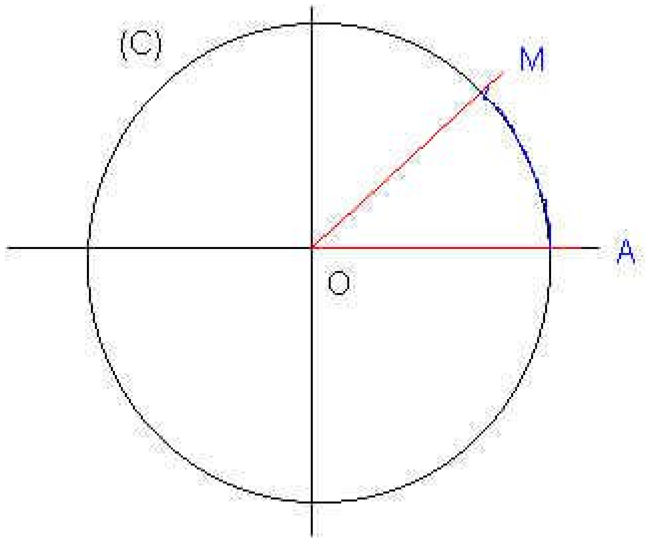


PARTIE II – La trigonométrie

I- Définitions

Définition : Soit (C) un cercle de rayon 1 de centre O. On décide de l'orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre que l'on qualifiera de **sens positif (ou sens direct)**. Ce cercle est appelé **Cercle Trigonométrique**.

Définition : Soit $\overline{AM}$ un arc du cercle trigonométrique (de rayon 1), la mesure en radians de l'arc $\overline{AM}$ est égale à la longueur de celui ci.

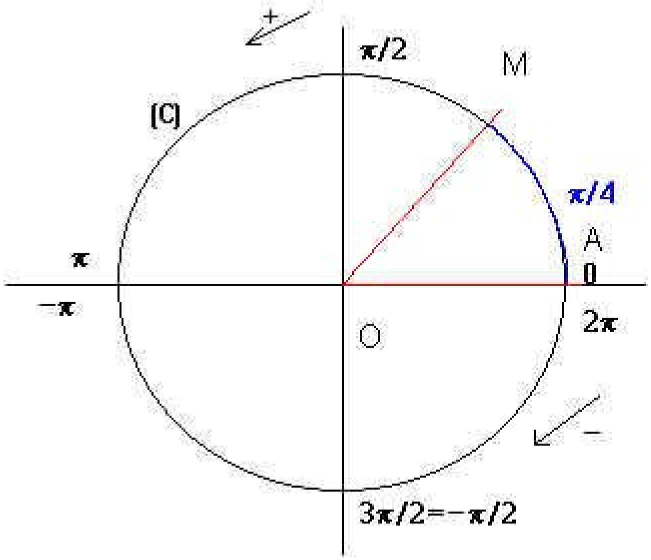


II- Mesures d'angles en radians

Propriété : Soit le cercle trigonométrique (C) orienté dans le sens direct. Son périmètre est alors de P=2π . On a donc la mesure du cercle en radian égale à 2π équivalent à un angle de 360°. On peut donc trouver la mesure en radian d'un arc sachant l'angle formé par celui ci.

Radians	Degrés
π Rad	180°

Propriété : Soit a la mesure d'un arc $\overline{AM}$ en radians, alors toutes les mesures de l'arc $\overline{AM}$ sont de la formes : .... $\overline{AM}$ =a+2*k*π , avec k∈ Z. (en effet, 2*k*π revient à k fois le périmètre du cercle).



Définition : On appelle **mesure principale** en radian d'un arc $\overline{AM}$ orienté, l'unique valeur de la mesure de cet arc comprise entre :]-π ,π]

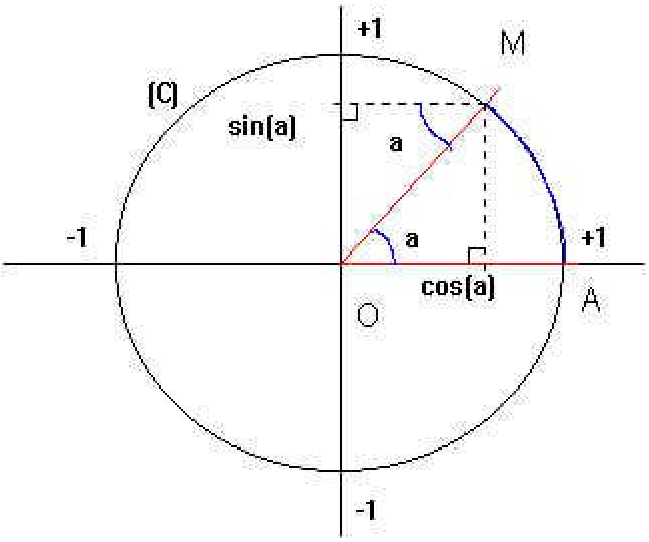
Remarque : On peut donc mesurer un arc en partant dans le sens inverse du sens direct, la mesure de cet arc sera alors négative (cf. dessin).

Définition : On appelle angle orienté de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle formé par l'arc issu de ces vecteurs. On le note ($\vec{u}$,$\vec{v}$). La mesure en radian de l'angle orienté ($\vec{u}$,$\vec{v}$), est la mesure en radians de l'arc formé par le couple ($\vec{u}$,$\vec{v}$).

Rq: Sur le dessin, l'angle orienté $(\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

III- Cosinus, Sinus dans le cercle trigonométrique.

Définition : Soit $\overline{AM}$ un arc du cercle trigonométrique, alors, on peut lire le cosinus de l'angle formé par cet arc sur l'axe horizontal et le sinus sur l'axe vertical.(trigonométrie du triangle rectangle).



Propriétés :

- On voit donc que $\forall x \in R,\ -1 \leq \cos(x) \leq +1$ et $\forall x \in R,\ -1 \leq \sin(x) \leq +1$
- De plus on a (Théorème de Pythagore) $\mathbf{\cos^2 x+\sin^2 x=1}$

Valeurs Remarquable :

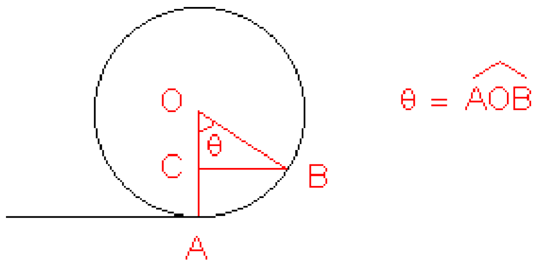
Mesure en Rad	0	π /6	π /4	π /3	π /2
Mesure en dgré	0	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	1/2	√ 2/2	√ 3/2	1
Cosinus	1	√ 3/2	√ 2/2	1/2	0
Tangente	0	√ 3/3	1	√ 3	Non défini

PARTIE III –Dérivées

Fonctions	Dérivées premières	Dérivées secondes
$y = at^3+bt^2+ct+d$	$dy / dt = 3at^2+2bt+c$	$d^2y / dt^2 = 6at+2b$
$y = \cos t$	$dy / dt = - \sin t$	$d^2y / dt^2 = - \cos t$
$y = \sin t$	$dy / dt = \cos t$	$d^2y / dt^2 = - \sin t$
$y = a.\cos (\omega t + \phi)$	$dy / dt = - a.\omega .\sin (\omega t + \phi)$	$d^2y / dt^2 = - a.\omega ^2.\cos (\omega t + \phi)$
$y = a.\sin (\omega t + \phi)$	$dy / dt = a.\omega .\cos (\omega t + \phi)$	$d^2y / dt^2 = - a.\omega ^2.\sin (\omega t + \phi)$

PARTIE IV – Ce qu'il faut savoir :

• **Longueur d'un arc de cercle. Dénivellation**



- Dénivellation entre A et B :

La figure ci-dessus montre que :

cos θ = CO / OB = CO / R qui s'écrit : CO = R.cos θ

La dénivellation entre les ponts A et B est :

h = AC = AO - CO = R - R.cos θ = R (1 - cos θ)

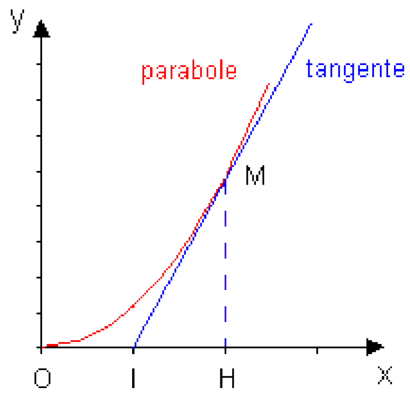
- Longueur de l'arc de cercle :

$\boxed{\overset{\frown}{AB} = s = R\,\theta \text{ (} \theta \text{ en radian, s et R en mètre)}}$

• **Propriété de la tangente à une parabole** (étudiée en cours d'année)

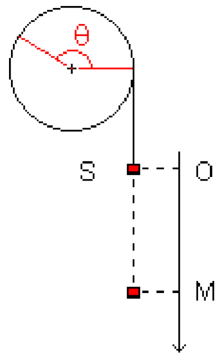
La tangente à la parabole y = a x ² au point M coupe l'axe horizontal au point I d'abscisse :

$\boxed{x_I = x_M / 2}$



OI = OH / 2 soit $x_I = x_M / 2$

• Translation rectiligne et rotation



- Rotation de la poulie et déplacement du solide S.

Lorsque la poulie tourne d'un angle θ autour de l'axe fixe par rapport à la terre, le solide S descend du point O au point M, avec :

$x = OM = R\,\theta$

x et R s'expriment en mètre. L'angle θ s'exprime en radian.

- Vitesse angulaire de la poulie et vitesse du solide S

La poulie a une vitesse angulaire :

$\omega = d\theta / dt$

Le solide S possède, lui, une vitesse V obtenue en calculant la dérivée de x par rapport à t :

$V = dx / dt = R\, d\theta / dt$

$V = R\,\omega$

La vitesse V du solide s'exprime en m / s alors que la vitesse angulaire ω de la poulie s'exprime en rad / s.